Отступление: η-функция Дедекинда.

$$G_2(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(mz+n)^2}=2\zeta(2)+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^2}$$

$$E_2(z)=\frac{1}{2\zeta(2)}G_2(z)=1+\frac{6}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^2} \quad (*)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^2}=-\frac{4}{B_2}\zeta(2)\sum_{d=1}^{\infty}d\,q^{dm}$$

$q=e^{2\pi i z}$

$\sigma_k(n)=\sum_{d\mid n}d^k$

$$E_2(z)=1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n$$

$z\mapsto -1/z$

$$E_2(z)\overset{?}{=}\frac{1}{z^2}E_2(-1/z)$$

$E_2(z+1)=E_2(z)$

$$z^{-2}E(-1/z)=\frac{1}{2\zeta(2)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(-m+nz)^2}=1+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{(mz+n)^2}.$$

Предложение $z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right)=E_2(z)+\frac{12}{2\pi i z}$

S_1 $\qquad S_2$

Д-во:

a_{mn} $\qquad S_1-S_2=\sum_m\sum_n a_{mn}-\sum_n\sum_m a_{mn}$

$$a_{mn}(z)=\frac{1}{(mz+n-1)(mz+n)}=\frac{1}{mz+n-1}-\frac{1}{mz+n}$$

$$\tilde{E}_2(z)=1+\frac{3}{\pi^2}\sum_{m\neq 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(mz+n)^2}-a_{mn}(z)\right)=E_2(z)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0}a_{mn}(z)=-\frac{2\pi i}{z}$$ Коблиц. 1988.

Опр. η-функция Дедекинда.

$$\eta(z)=e^{2\pi i z/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i n z}\right)$$

$e^{2\pi i z}=q$

Предложение $\eta\left(-\frac{1}{z}\right)=\sqrt{z/i}\,\eta(z)$

$\mathrm{Re}\sqrt{\cdot}\geq 0$

Д-во: Пусть log-произв. совпадают. Тогда

$$\eta\left(-\tfrac{1}{z}\right)=C\sqrt{z/i}\,\eta(z)\qquad z=i\Rightarrow C=1.$$

$$\frac{\eta'(z)}{\eta(z)}=\frac{2\pi i}{24}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}\right)=$$

$$\frac{\eta'}{\eta}=\frac{2\pi i}{24}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right)=\frac{2\pi i}{24}E_2(z)$$

$$z^{-2}\frac{\eta'(-1/z)}{\eta(-1/z)}=\frac{1}{2z}+\frac{\eta'(z)}{\eta(z)}$$

$$z^{-2}E_2(-1/z)=\frac{12}{2\pi i z}+E_2(z)$$

Т. (Якоби) $(2\pi)^{-12}\Delta(z)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$

Д-во: $\eta^{24}=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$

η^{24}
a) голом. всюду на $\mathbb{H}$;
b) $\eta^{24}(\infty)=0$
c) η^{24} – слабо-мод. веса 12

$\Rightarrow$ $\eta^{24}\in S_{12}$

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_n\tau(n)q^n$$

функция Рамануджана

Srinivasa Ramanudjan (1887 – 1920)

$$\frac{1}{\prod_n(1-q^n)}=\prod\frac{1}{1-q^n}=\prod_n\left(1+q^n+q^{2n}+\dots\right)$$

$$=\sum_n p(n)q^n$$

$p(n)=?$ число разбиений n в Σ натур. слаг.

Следствие $j(z)=\frac{1728\,g_2^3}{\Delta}=\frac{1}{z}+744+196884q+21493760q^2+\dots$

все коэф. Φ $j(z)$ – целые числа.

---

§. Функция Рамануджана

n	1	2	3	4	5	6
$\tau(n)$	1	−24	252	−1472	4830	−6048

$-6048=(-24)\cdot 252$

$\tau(2)\cdot\tau(3)=\tau(6)$

Гипотеза(ы) Рамануджана.

a) $\tau(mn)=\tau(m)\tau(n)$ при $(m,n)=1$.

b) $\tau(p)\tau(p^n)=\tau(p^{n+1})+p^{11}\tau(p^{n-1})$ p-простое, $n\geq 1$

c) $|\tau(p)|\leq 2p^{11/2}$

Делинь 1969 $\qquad$ 1917 Mordell b)

Гипотеза Вейля

Гипотеза (Lehmer) $\tau(n)\neq 0$.

$$f(q) = \sum c(n) q^n$$

$$L(f,s) = \Phi_s = \sum \frac{c(n)}{n^s}$$ преобразов. Меллина f.

$$= \prod_p \frac{1}{(\quad)}$$ p – простые

квадр. отн. p^{-s}..

$$L(\Delta, s) = \prod_p (1 - \tau(p) p^{-s} + p^{11-2s})^{-1}$$

$$\boxed{X = p^{-s}}$$

$$1 - \tau(p) X + p^{11} X^2 = (1 - aX)(1 - a'X)$$

Предложение $\Leftrightarrow$ы.

1) $|\tau(p)| \leq 2 p^{11/2}$

2) $|a| = |a'| = p^{11/2}$

3) $\bar{a} = a'$

$2 \Rightarrow 1$ $\quad |\tau(p)| = a + a'$ нер-во Δ.

$3 \Rightarrow 2$ $\quad |a|^2 = a\bar{a} = aa' = p^{n}$

$1 \Rightarrow 3$ $\quad \tau(p)^2 - 4p^{11} \leq 0$

Сравнения для $\tau(n)$

$$\tau(n) \equiv n^2 \sigma_7(n) \pmod{27}$$

$$\tau(n) \equiv n \sigma_3(n) \pmod{7}$$

$$\boxed{\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}}$$

Теорема $\quad \sigma_{2k-1}(0) = \frac{1}{2} \zeta(1-2k) = \frac{\Gamma(2k)\zeta(2k)(-1)^k}{(2\pi)^{2k}}$

n-й коэфф параб. формы.

При $k, \ell > 1$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{2k-1}(m) \sigma_{2\ell-1}(n-m) = \frac{\Gamma(2k)\Gamma(2\ell)}{\Gamma(2k+2\ell)} \frac{\zeta(2k)\zeta(2\ell)}{\zeta(2k+2\ell)} \sigma_{2k+2\ell-1} + a_n$$

$$E_k E_\ell - E_{k+\ell} = \text{пораб. форма}$$

Следствие $\nexists$ нетрив. параб. форм весов 4, 6, 8, 10, 14.

$$E_2(z)^2 = E_4(z)$$

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n} \sigma_3(m) \sigma_3(n-m)$$

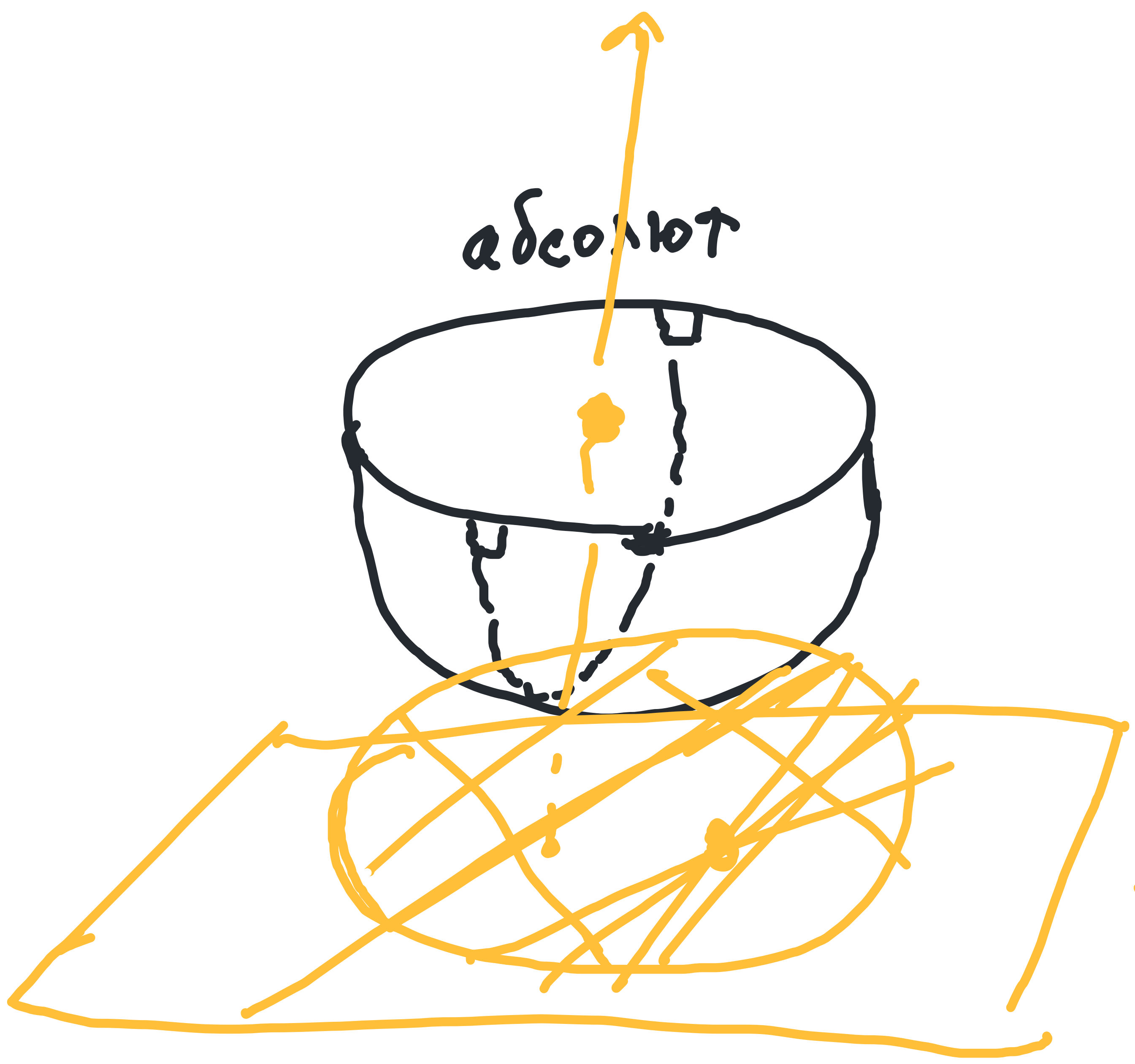
$k = \ell = 3$

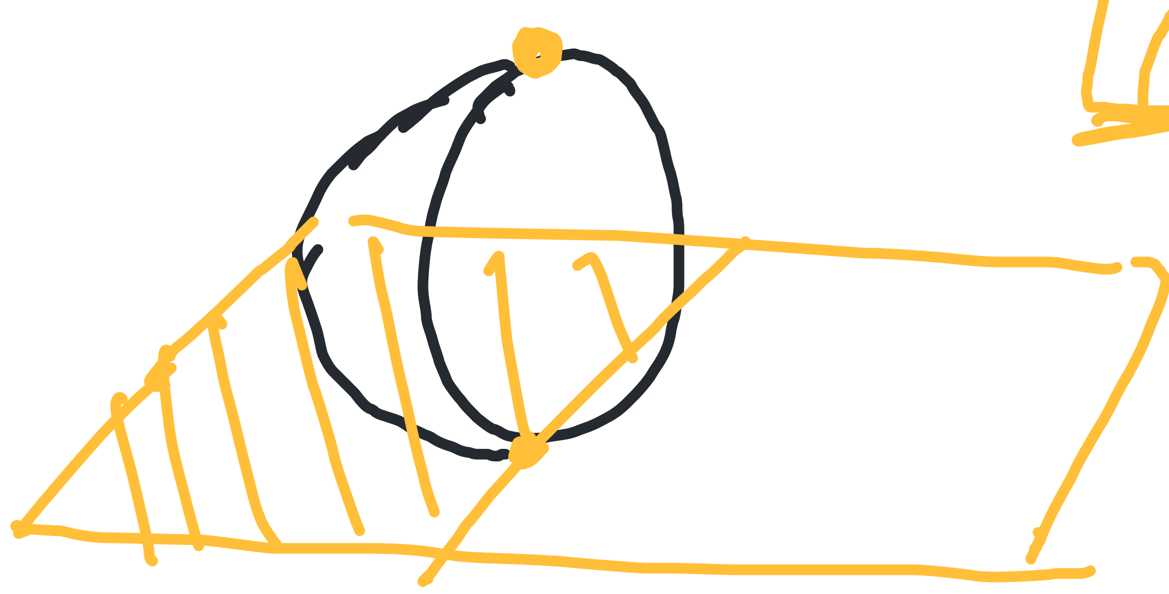
$$\tau(n) = \frac{65}{756} \sigma_{11}(n) + \frac{691}{756} \sigma_5(n) - \frac{691}{3} \sum_{m=1}^{n} \sigma_5(m) \sigma_5(n-m)$$

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$$

Глава Геометрия в $\mathbb{H}$.

Модели геометрии Лобачевского.





$$PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / \{\pm I\}$$

$$SL_2(\mathbb{Z})$$

J. Milne