$SL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma(1) \triangleright \Gamma(N)$

§. Фундамент. области для подгрупп в $\Gamma(1)$.

Утв: $\exists\ \Gamma' \subset \Gamma \quad \underbrace{[\Gamma : \Gamma']}_{=n} < +\infty$

Г и Г' действ на X

$\Gamma = \bigcup\limits_{i=1..n} \alpha_i \Gamma'$. Тогда $\overset{\text{ф.о. }\Gamma'}{F'} = \bigcup\limits_{i=1..n} \alpha_i^{-1} \overset{\text{фунд. область }\Gamma}{F}$

Д-во: $\forall x \in X \quad \exists\ x' \in F' : x \overset{\Gamma'}{\sim} x'$

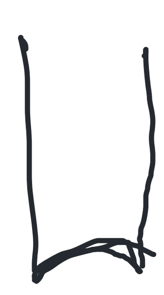
$\forall x \in X\ \exists\ \gamma \in \Gamma \quad \gamma x \in F \qquad \gamma \in \alpha \Gamma'$

$\gamma = \alpha \gamma' \quad \gamma' \in \Gamma'$

$\gamma' x = \alpha^{-1} \overbrace{\gamma x}^{\in F} \in \alpha^{-1} F$

Пример Найдем $F(\Gamma(2))$ $\quad 0 \to \Gamma(2) \to \Gamma(1) \to SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0$

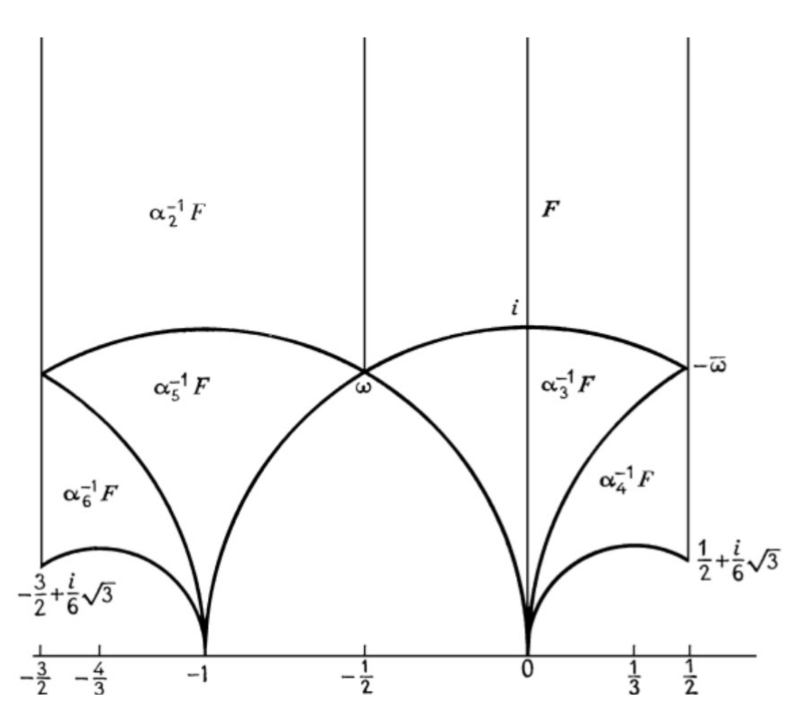
$\cong S_3$

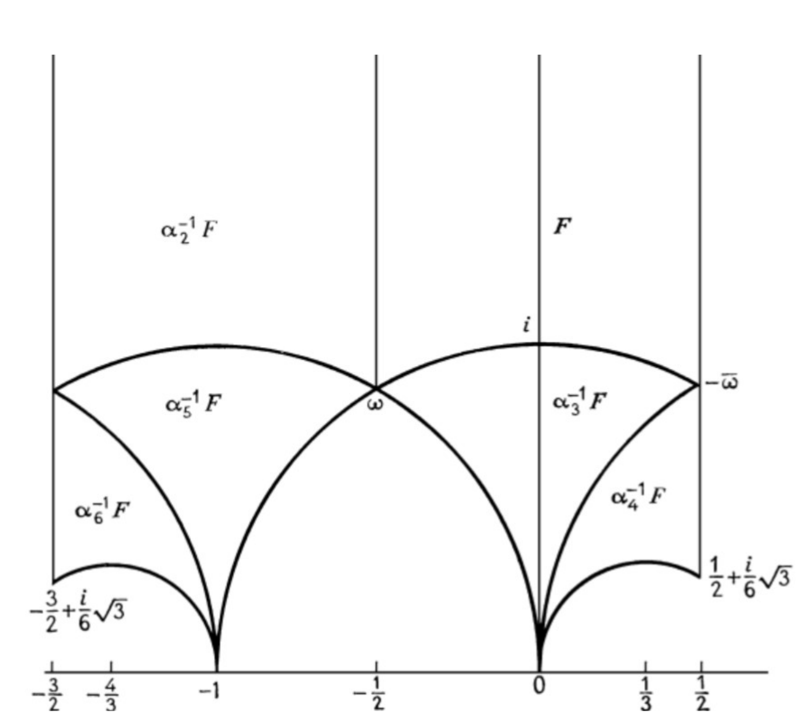


$\alpha_1 = I \qquad \alpha_4 = TS$

$\alpha_2 = T \qquad \alpha_5 = ST$

$\alpha_3 = S \qquad \alpha_6 = T^{-1} S T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$





§. Комплексная стр-ра на Р.П.

Опр X - хаусд. т.п. Назовем коорд. окр. ~~точку~~

(U, z) $\quad U \subset X$ open $\quad z: U \to \mathbb{C}$ гомеоморфизм на подмн. в $\mathbb{C}$

Две коорд. окр. U_i, U_j совместимы, если

$$\varphi_{ij} = z_i \circ z_j^{-1} : z_j(U_i \cap U_j) \to z_i(U_i \cap U_j)$$

явл. голоморфной ф-цией $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

и $\varphi_{ij}' \neq 0$.

$\{U_i\}$

Опр: Семейство коорд. окр. называется коорд. покрытием, если $X = \cup U_i$ и все они попарно совместны.

Опр Два коорд. покрытия $\{U_i\}\{U_i'\}$ назыв. эквивалентными, если их $\{U_i\} \sqcup \{U_i'\}$ — коорд. покрытие.

Опр. Класс эквив. коорд. покрытий назыв. комплексной стр-рой

Одн. компл. мн. + компл. стр-ра = РП.

Опр.

$$\begin{array}{ccc} X \supset (U_i, z) & & \\ f \downarrow & & \uparrow z_i^{-1} \\ \mathbb{C} & \longleftarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

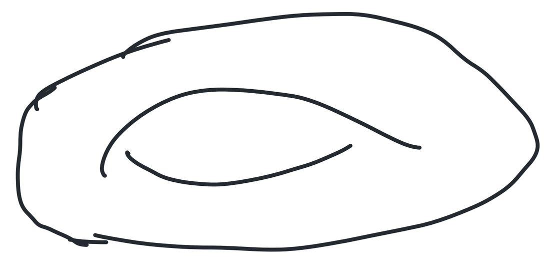
Опр. Мероморфная ф-ция на $U \subset \mathbb{C}$

голоморфна на $U \setminus \Omega$

$\omega \in \Omega$

$\exists m: (z-\omega)^m f(z)$ голом. в окрестн ω.

Пример. Тор



Пример. Экзотические сфера S^7 Милнор 1956.

$(X, \mathcal{O}_X)$

Пример D - откр. диск. Δ - конечн. группа

Δ действ. на D и сохр. точку 0.

$\mathrm{Aut}(D, 0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \supset \Delta$

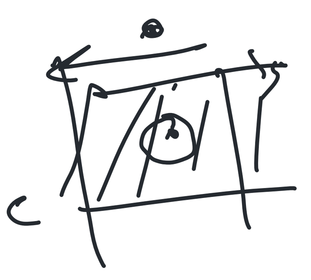
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ $\quad |\Delta| = m$ $\qquad \zeta^m = 1$ $\qquad z \to \zeta z$

z^m - функция на D инвариантная относ. действия Δ.

та $f(z^m)$ опр. ф-ции на $\Delta \setminus D$

$$\Delta \setminus D \overset{z^m}{\simeq} D$$

Пример $X = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > c \} \subset$



$\mathbb{Z} \ni n$ $\qquad z \mapsto z + nh$ $\qquad \overline{X} = X \cup \{\infty\}$

$\infty + nh = \infty$ $\qquad h \in \mathbb{N}$

$N > c$

окрестность ∞ $\quad \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > N \}$

$$q(z) = \begin{cases} e^{2\pi i z / h} & z \neq \infty \\ 0 & z = \infty \end{cases}$$

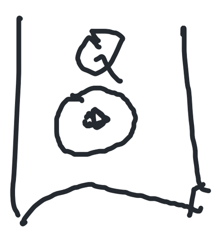
$\mathbb{Z} = \Gamma \setminus \overline{X} \sim D$

§. Компл. стр-ра на $\Gamma(1)\backslash\overline{\mathbb{H}}$.

$\Gamma(1)\backslash H$ $\quad p: \mathbb{H} \to \Gamma(1)\backslash H$.

1) $\exists$ Q — неэллиптическая. $\exists$ окр. U

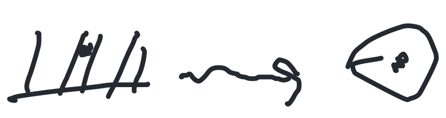
$\varphi: U \to p(U)$ гомеоморфизм.



2) $\exists$ $Q \sim i$ эллипт. точка. $\quad Stab_{\Gamma(1)}\, i = \{S, I\}$

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

$S \to \sigma \quad \sigma(z) = -z.$ $\quad z \xrightarrow{f} \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2$



коорд. окр. точки i

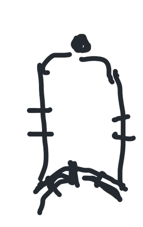
$$z \xrightarrow{\varphi} e^{2\pi i z}$$

$e^{-2\pi c}$

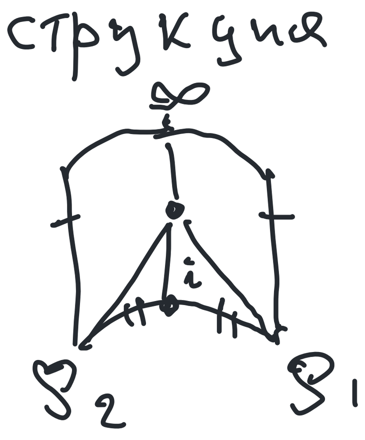
Утв. $\Gamma(1)\backslash\overline{\mathbb{H}}$ — компактная Р.п. рода 0. $\Rightarrow$ изоморфна сфере S^2.

Д-во: Компактность $\overline{D} \cup \{\infty\}$ — компактен.

a) род=0 конструкция



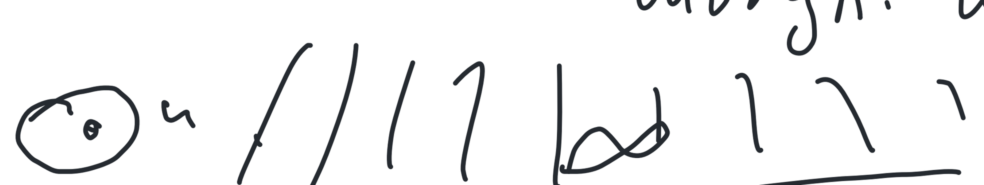
b)



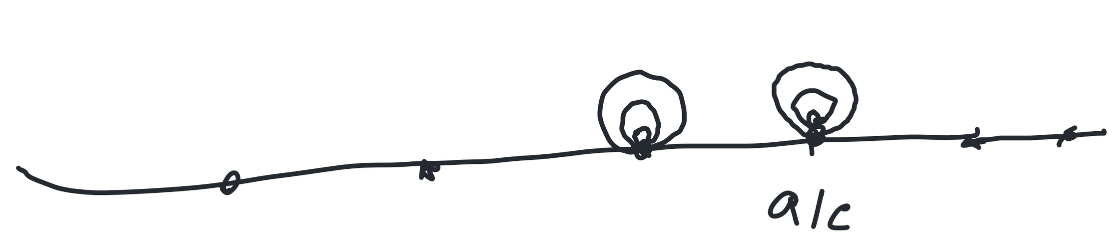
$2-2g = B - P + \Gamma =$
$= 4 - 6 + 4 = 2$

c) Р.п. односвязна. компактна.
Т. Униформизации

d) $j: \Gamma(1)\backslash\overline{\mathbb{H}} \to \overline{\mathbb{C}}$.
модул. инвариант.



$\overline{\mathbb{H}}$



a/c

§. Компл. стр-ра на $\Gamma\backslash\overline{\mathbb{H}}$

$\Gamma < \Gamma(1)$ кон. индекса.

$\exists\, N \in \mathbb{N}$ $\quad T^N \in \Gamma$ $\quad z \mapsto z+N$.

$$q(z) = \exp(2\pi i z/N) = q(z+N)$$

$\underline{r} = a/c \quad r = \sigma\infty \quad \sigma \in \Gamma(1)$

$$\boxed{z \mapsto q(\sigma^{-1}(z))}$$

Обозн.

$Y(N) = Y(\Gamma(N))$ — ф.о. $\Gamma(N)\backslash\mathbb{H}$

$X(N) = X(\Gamma(N))$ — ф.о. $\Gamma(N)\backslash\overline{\mathbb{H}}$