$f \neq 0$ мод. форма веса $k$. $\quad f(q) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) q^m$

$$T(n) f(z) = \sum \gamma(m) q^m$$

$$\gamma(m) = \sum_{\substack{a \mid (m,n) \\ a \geq 1}} a^{k-1} c(mn/a^2)$$

$k$ - вес формы $f$
$n$ - номер опер. Гекке
$m$ - степень.

$q = e^{2\pi i z}$

---

Д-во: $T(n) f(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad = n \\ a \geq 1 \\ 0 \leq b < d}} d^{-k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) \exp(2\pi i (az + b/d) m)$

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = n$, $0 \leq b < d$

$$\sum_{0 \leq b < d} \exp(2\pi i b m/d) = \begin{cases} 0 & d \nmid m \\ d & d \mid m \end{cases}$$

$m/d = \tilde{m}$

$$T(n) f(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad = n \\ a \geq 1,\ \tilde{m} \in \mathbb{Z}}} d^{1-k} c(\tilde{m} d) q^{a\tilde{m}} \qquad \mu = a\tilde{m}$$

$$= \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \Big( \sum_{\substack{a \mid (n,\mu) \\ a \geq 1}} \big(\tfrac{n}{d}\big) c\big(\tfrac{\mu d}{a}\big) \Big) q^\mu, \qquad \tfrac{n}{d} = a, \quad \tfrac{\mu d}{a} = \tfrac{\mu n}{a^2}$$

$\blacksquare$

Следствие
- Если $f$ - мером. слабо-модул. форма, то и $T(n) f$ - тоже мером. сл.-мод. форма.
- —"— $f$ - голоморф. $\Rightarrow$ $T(n) f$ - голом.
- —"— $f$ - параболич. $\Rightarrow$ $T(n) f$ - параболич.

---

$c(n) = 0$ при $n < N < 0$ $\Rightarrow$ $c\big(\frac{mn}{a^2}\big) = 0$ при $m < nN$

Следствие $\quad \gamma(0) = \sigma_{k-1}(n) c(0)$
$\gamma(1) = c(n)$

Следствие $\quad$ Если $p$ - простое, то $\quad \gamma(m) = c(pm)$ $\quad p \nmid m$
$\gamma(m) = c(pm) + p^{k-1} c(m/p)$ $\quad p \mid m$

## §. Ряды Дирихле и Эйлеровы произведения.

Опр. $\forall$ алгебру, порожд. всеми операторами Гекке $T_k(n)$ $\forall n$. Эта алг. назыв. алгеброй Гекке:

Утв. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) q^n$ $\quad f \neq 0$ веса $k > 0$.

$\exists$ $f$ явл. собств. функцией всех опер. Гекке $T_k(n)$

$T(n) f = \lambda(n) f \quad \lambda(n) \in \mathbb{C}$
$n \geq 1$

Тогда $\quad$ a) $c(1) \neq 0$
b) Если $c(1) = 1$, то $c(n) = \lambda(n)$ $\forall n \geq 1$

Д-во: $\quad c(T(n) f)(1) = \boxed{c(n) = \lambda(n) c(1)}$

Следствие $\quad \exists$ $f, g$ формы одинаков. веса оба - собств. ф-ции алгебры Гекке с один. $\lambda(n)$ и нормализованы

Тогда $\quad f = g$

Следствие $\quad f$ - норм. мод. форма, то
- $c(mn) = c(m) c(n)$ при $(m,n) = 1$
- $c(p) c(p^n) = c(p^{n+1}) + p^{k-1} c(p^{n-1})$ $\quad p$-прост. $n \geq 1$

$f = \sum_{n>0} c(n) q^n$

---

Опр. Рядом Дирихле на $f$ назыв.

$$\Phi_f(s) = \sum_{n>0} \frac{c(n)}{n^s}$$

$\mathrm{Re}(s) > k/2 - 1$ абс. сходится.

Теорема Хекке

$f$ - мод. форма $\quad c(n) = O(n^{k/2})$

Произв. Эйлера

$$\Phi_f(s) = \prod_{p \text{ простые}} \left(1 - c(p) p^{-s} + p^{k-1-2s}\right)^{-1}$$

Д-во: $\quad \sum_n \frac{c(n)}{n^s} = \prod_p \Big( \sum_k c(p^k) p^{-ks} \Big)$ $\quad$ [illegible]

$$(1 + c(p) p^{-s} + p^{k-1-2s})(1 + c(p) p^{-s} + c(p^2) p^{-2s} + \dots)$$

$p^{-ns}$ $\quad \big( c(p^n) p^{-ns} + c(p^{n-1}) p^{(1-n)s} c(p) p^{-s} + c(p^{n-2}) p^{2-ns} \cdot p^{k-1-2s} \big)$

$$\boxed{c(p^n) + c(p) c(p^{n-1}) + p^{k-1} c(p^{n-2})}$$

## §. [illegible]. Преобраз. Меллина.

1854—1933.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$$

$f$ - [illegible] функция.

$$M(f)(s) = \int_0^\infty f(it) t^s \frac{dt}{t}$$

$\int$ - [illegible] $\quad t \mapsto t/2\pi n$

$f(t) = \sum a_n q^n \qquad q = e^{2\pi i t}$

$$(Mf)(s) = \sum a_n \int_0^\infty e^{-2\pi n t} t^s \frac{dt}{t} = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \sum a_n n^{-s}$$

$f$ - парабол. форма. $\quad \int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$

$$\int_0^1 f(it) t^s \frac{dt}{t} = \int_1^\infty f\big(\tfrac{i}{t}\big) t^{-s} \frac{dt}{t} = \int_1^\infty (it)^k f(it) t^{-s} \frac{dt}{t}$$

$t \mapsto 1/t$

$$= i^k \int_1^\infty f(it) t^{k-s} \frac{dt}{t}$$

$$\boxed{i^k M(f)(k-s) = M(f)(s)}$$

Следствие $\quad f$ - параб. форма. $\quad \Phi_f(s)$

$$X_f(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \Phi_f(s)$$

$$X_f(s) = (-1)^{k/2} X_f(k-s)$$

---

Пример 1. Ряды Эйзенштейна.

$$G_k(z) = \sum_{m,n}^{*} (mz+n)^{-2k} = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

$E_k(z) = G_k(z) / 2\zeta(2k) \qquad \zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_k \pi^{2k}$

$$E_k(z) = 1 + \gamma_k \sum \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

$$\gamma_k = (-1)^k \frac{4k}{B_k}$$

---

$$E_6 = 1 + \frac{5460}{691} \sum \sigma_{11}(n) q^n.$$

Лемма $\quad G_k$ $k \geq 2$ [illegible]. $\quad T(n) G_k = \sigma_{2k-1}(n) G_k$

$$\Phi_{G_k} = \zeta(s) \zeta(s - 2k + 1)$$

---

$\mathcal{M}_k = S_k \oplus (G_k)$ $\quad$ [illegible] ?

---

$G_k(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda}^{*} \lambda^{-2k}$ $\quad \Big|\quad T(p) G_k(\Lambda) = \sum_{[\Lambda : \Lambda'] = p} \sum_{\lambda \in \Lambda'} \lambda^{-2k}$

---

$\lambda \in p\Lambda$ $\quad p+1$
$\lambda \notin p\Lambda$ $\quad 1$

$T(p) G_k = G_k(\Lambda) + p \sum_{\lambda \in p\Lambda}^{*} \lambda^{-2k}$, $\quad \sum_{\lambda \in p\Lambda}^{*} \lambda^{-2k} = p^{-2k} G_k(\Lambda)$

$$T(p) G_k(\Lambda) = p^{2k-1}(1 + p^{1-2k}) G_k(\Lambda)$$

$$(p^{2k-1} + 1) = \sigma_{2k-1}(p)$$

Ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{2k-1}(n)}{n^{s}} = \sum_{a, d \geq 1} \frac{a^{2k-1}}{a^s d^s} = \Big(\sum \frac{1}{d^s}\Big)\Big(\sum \frac{1}{a^{s+1-2k}}\Big) = \zeta(s)\, \zeta(s+1-2k)$$