$$SO_2(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \theta\in\mathbb{R}$$

замкн. подгр. в $SL_2(\mathbb{R})$ $\quad SL_2/SO_2 =$ Хаусд. топ. пр-во.

Предложение

a) $SL_2(\mathbb{R})$ действ. транз. на $\mathbb{H}$

b) изоморфизм $SL_2(\mathbb{R})/\pm I \xrightarrow[\cong]{\varphi} Aut(\mathbb{H}) = BiHol Aut.$

c) $Stab\, i = SO_2(\mathbb{R})$

d) $SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R}) \xrightarrow[\text{гомеоморфизм}]{} \mathbb{H} \qquad \alpha\cdot SO_2(\mathbb{R}) \longmapsto \alpha i$

---

a) $z = x+iy \quad y>0 \qquad \frac{1}{\sqrt{y}}\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M \qquad Mi = z$

b) $\gamma\in Aut(\mathbb{H}) \qquad \alpha(i) = \gamma(i) \qquad \gamma\circ\alpha^{-1} \qquad \gamma(i) = i$

$D =$ ед. круг с центром 0. $\qquad \rho: \mathbb{H}\to D \quad z\longmapsto \frac{z-i}{z+i} \qquad \overline{\gamma} = \rho\gamma\rho^{-1} \quad \overline{\gamma}: D\to D$

$$\overline{\gamma} = e^{\theta i} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$$

c) $\frac{ai+b}{ci+d} = i \iff ai+b = -c+di \iff \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$

$SO_2 \ni \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad a^2+b^2 = 1$

Лемма $\forall$ автоморфизм D сохраняющий точку 0 имеет вид $z \mapsto \lambda z$ $|\lambda| = 1$. $\lambda \in \mathbb{C}$

Д-во: Лемма Шварца. $f(z)$ голом. на D и $f(0)=0$

$\exists\ |f(z)| \le 1$ для $|z| \le 1$

тогда $|f(z)| \le |z|$

и если $|f(z_0)| = |z_0|$ $z_0 \neq 0$ $\Rightarrow \exists \lambda : f(z) = \lambda z$

§. Классификация дробно-лин. преобразований

$SL_2(\mathbb{C})$ действ. на $\hat{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{C}P^1$) $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $(x:y)$

$$\gamma z = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \gamma \infty = \frac{a}{c}$$

$\forall\ \gamma \in SL_2(\mathbb{C})$ сопр. матр. $A \gamma A^{-1}$

i) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ $\lambda \neq \mu$

$$X^2 - \mathrm{Tr}\,\gamma X + \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\det \gamma}}$$

$$X^2 + bX + 1 \quad |b| < 2$$

i) параболическое

iia) $|\lambda| = |\mu| = 1$ эллиптическое

iib) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ гиперболическое

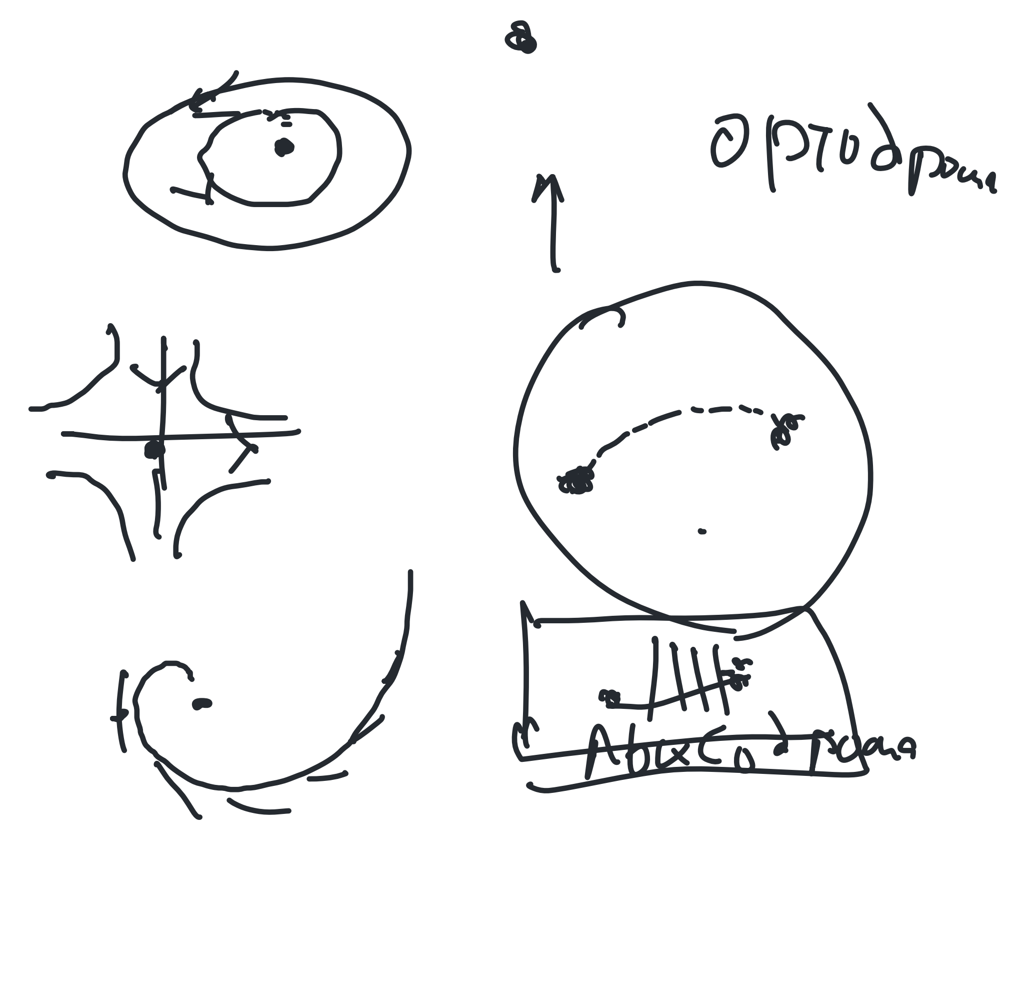
iic) все кроме iia и b локсодромическое.

i) — " — и $|\mathrm{Tr}| = 2$ — параболич.

ii a) $\mathrm{Tr}\,\gamma \in \mathbb{R}$ и $|\mathrm{Tr}| < 2$ — элл.

— ii b) $\mathrm{Tr}\,\gamma \in \mathbb{R}$ и $|\mathrm{Tr}| > 2$ — гиперб.

— ii c) $\mathrm{Tr}\,\gamma \notin \mathbb{R}$ — локсодром.



$\Gamma < SL_2(\mathbb{R})$ — дискретная подгруппа.

Опр. $z \in \mathbb{H}$ назыв. эллиптической $\exists$ эл-т пр. γ : $\gamma z = z$

$s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ назыв. параболич. точкой $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $s = s$, ∞ ∞

касп = cusp

Утв. z — эллипт. точка.

Тогда $Stab_\Gamma z$ = конечная циклич. группа.

Д-во: 1) Сдвинем точку в i. $\exists \alpha \in SL_2(\mathbb{R})$

$\alpha z = i$

$Stab_{SL_2(\mathbb{R})} i = SO_2(\mathbb{R})$ $\qquad \gamma \mapsto \alpha \gamma \alpha^{-1}$

компактн.

$Stab_\Gamma z = \boxed{SO_2(\mathbb{R})} \cap \alpha \Gamma \alpha^{-1}$ ← дискр.

Пример $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ $\qquad \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ — параболич.

i $\{S \quad S^2 = -I \quad S^3 \quad S^4 = 1\}$

ρ $\{TS \quad \ldots \quad (TS)^3 = -I\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \infty = \infty$

$z \mapsto z+1$

<u>Утв</u> $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) > \Gamma' = \{S, T\}$ Тогда $\Gamma = \Gamma'$

$z \in F$ $g \in \Gamma$ $\gamma(gz) \in F$
<u>внутр.</u>

$\exists \gamma \in \Gamma'$

$\underline{\gamma g} z$ и z

$\boxed{\gamma g = \pm I}$ $-I \in \Gamma'$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad S^2$

$(a, c) \mapsto (a-c, c) \to \dots$

Γ'
$\Downarrow$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

$\min(\max\{|a|, |c|\})$

$a, c > 0$

$\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$

<u>Замечание</u> $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = TS$

SRSRSR ....

1) $SL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$ $\quad S \to \mathbb{Z}_4$, $\pm I \to \mathbb{Z}_2$

$S^2 = R^3$ $\quad S^2 \leftrightarrow R^3$

$\cancel{S^2} \cancel{R^3}$

$\boxed{2)\ PSL_2(\mathbb{Z}) = \underset{S}{\mathbb{Z}_2} * \mathbb{Z}_3 \leftarrow R}$