§. Модулярные формы как дифференциалы.

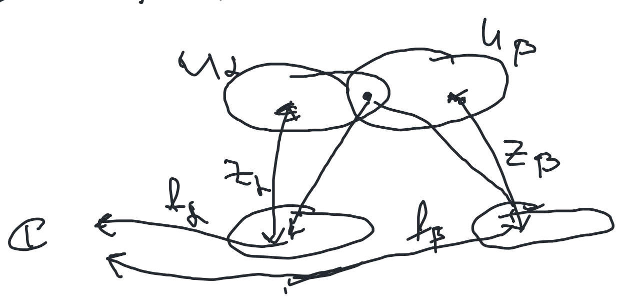
Диф. формы на многообразии.

$f_\alpha \ (U_\alpha, z_\alpha)$ $\qquad f(z)\,dz$

$f_\beta \ (U_\beta, z_\beta)$ $\qquad$ мером. ф-ция

$f_\alpha(z_\alpha)\,dz_\alpha = f_\beta(z_\beta)\,dz_\beta$

$\boxed{f_\alpha = f_\beta \dfrac{dz_\beta}{dz_\alpha}}$



$f_\alpha = f_\beta \left(\dfrac{dz_\beta}{dz_\alpha}\right)^k$

$\omega = f(z)\,dz$

в точке P

Пучок диф. форм.

- Д.ф. ω наз. голоморфной / мероморфн. если $f(z)$ – гол / мер. в $\forall$ карте.
- Нуль д.ф. в P назыв. нуль $f(z)$ в P.
- Вычет д.ф. в точке $= 0$ или $\neq 0$

Все мером д.ф делятся на 3 рода:

1) голоморфные
2) мером. с нулевыми вычетами
3) прочие мероморфные

Пример $\quad \overline{\mathbb{C}} \quad dz = \omega \qquad w = \frac{1}{z} \qquad dw = \frac{dz}{z^2}$

Утв. Мером. д.ф. являются модулем (в.п. dim = 1) над полем мером. функций.

X – комп Р.П. $\qquad \omega = f(z)\,dz \qquad \omega' = g(z)\,dz$

Опр. $\quad Div(X)$ св-д. аб. группа, порожд всеми точками X.

$\sum\limits_{a_i \in \mathbb{Z}} a_i X_i \qquad X_i \in X$

- Дивизор эффективен, если $a_i \geq 0$.
- Дивизор главный, если это $div(f) \quad f \in \mathcal{M}^\times(X)$

$(f) = div(f) = \sum\limits_{P \in X} \nu_P(f) P$

$f \mapsto div(f) \qquad \mathcal{M}^\times(X) \to Div(X) \to Cl(X) \to 0$

$D \equiv D'$ если $D - D' = (f)$

- $deg : Div(X) \to \mathbb{Z} \qquad \sum a_i P_i \mapsto \sum a_i$

степень $div(f) = 0 \Rightarrow deg : Cl(X) \to \mathbb{Z}$.

$\omega = f(z)\,dz \qquad div(\omega) = \sum\limits_P \nu_P(f) P$

Замеч. $\quad f \in \mathcal{M}^\times(X) \qquad div(f\omega) = (f) + div(\omega)$

Следствие: Все дивизоры диф. форм лежат в одном классе дивизоров

Этот класс назыв. каноническим K

Опр. $\quad D \in Div(X)$

$\mathcal{L}(D) := \{ f \in \mathcal{M}(X) : D + (f) \geq 0 \} \qquad \dim \mathcal{L}(D) = \ell(D)$

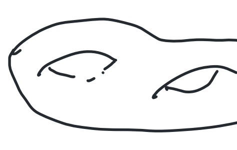
$-P \qquad \mathcal{L}(-P) \ni f, g \qquad \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(P)$

$D = D' + (f) \qquad \mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{L}(D') \qquad g \leftrightarrow g f^{-1}$

Теорема (Римана – Роха) $\qquad$ Густав Рох 1839 – 1866

$D \in Div(X)$

$\ell(D) = deg(D) + 1 - g + \underbrace{\ell(K - D)}$ $\quad$ Рох



$g = 2$.

$\ell(D) \geq deg(D) + 1 - g$ $\quad$ Риман

Следствие $\quad K$ – канонич. класс

$deg(K) = 2g - 2 \qquad \ell(K) = g$

Д-во: $\quad D = 0$

$1 = 0 + 1 - g + \ell(K) \Rightarrow \ell(K) = g$

$D = K \qquad g = deg(K) + 1 - g + 1 \Rightarrow deg(K) = 2g - 2$

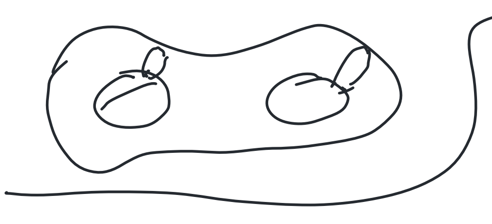
$\omega = dz \qquad deg\, \omega = 2g - 2 = -2$

Следствие $\quad K = div(\omega)$ – канон класс.

$f \in \mathcal{L}(K) \quad div(f\omega) \geq 0 \qquad f(\omega)$ голом. форма.

$\mathcal{L}(K) \xleftrightarrow{f \mapsto f\omega}$ голом. форма.

dim пр-ва голом. форм $= g$



$\ell(K - D)$

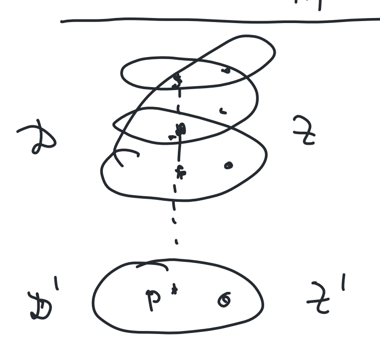
Следствие $\quad deg(D) > 2g - 2$

$\boxed{\ell(D) = deg(D) + 1 - g}$

$deg(\cancel{D+}K - D) < 0$

$\ell(D) = 0 \quad \Rightarrow < 0$

Важный пример. $\quad D$ – един. диск



$D \xrightarrow{w} D \qquad w(z) = z^e$

$z \mapsto z^e \qquad e \in \mathbb{N}$

dz' на D' $\qquad dz' = dw(z) = e z^{e-1} dz$

$w^*(dz')$ – нуль порядка $e-1$ в нуле

Т. Формула Римана – Гурвица

$f : Y \to X$ голом. отображение комп. Р. П. $\quad m : 1$

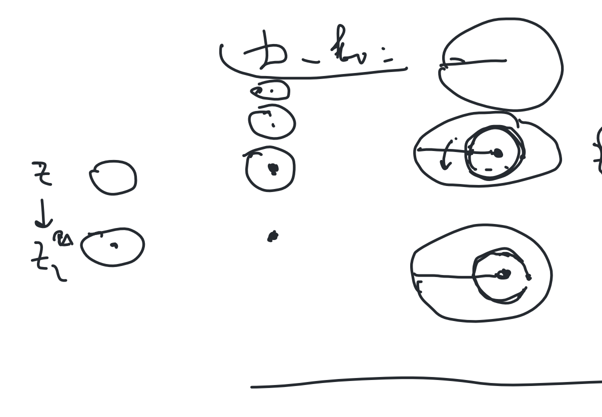
(кроме конечного числа точек)

$\exists\, P \in X \quad e_P$ – индекс ветвления

$2g(Y) - 2 = m(2g(X) - 2) + \sum\limits_P (e_P - 1)$

Д-во:

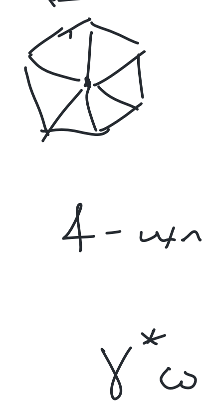
$z \to z^2$



ω на X.

$deg(w^*(\omega)) = m\, deg(\omega) + \sum (e_P - 1)$

$deg\, K = 2g - 2 \qquad 2g(Y) - 2 = m(2g(X) - 2) + \sum\limits_P (e_P - 1)$



§. Модул. ф. и т. РР.

f – мером. ф. на $\mathbb{H}$. $\qquad \omega = f(z)\,dz$

$\gamma^* \omega = f(\gamma z)\, d\,\dfrac{az+b}{cz+d} \qquad \gamma = \dfrac{az+b}{cz+d} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

$\shortparallel$

$f(\gamma z) \dfrac{dz}{(cz+d)^2} = f(z)\,dz$

{мод. формы веса 2} $\leftrightarrow$ {мером. инвар диф. ф.} на $\mathbb{H}$

$\updownarrow$

{мером. диф. ф. на $\Gamma \backslash \overline{\mathbb{H}}$}

Опр. $\qquad \omega = f(z)(dz)^k$

$\boxed{\text{k-fold dif. form}}$