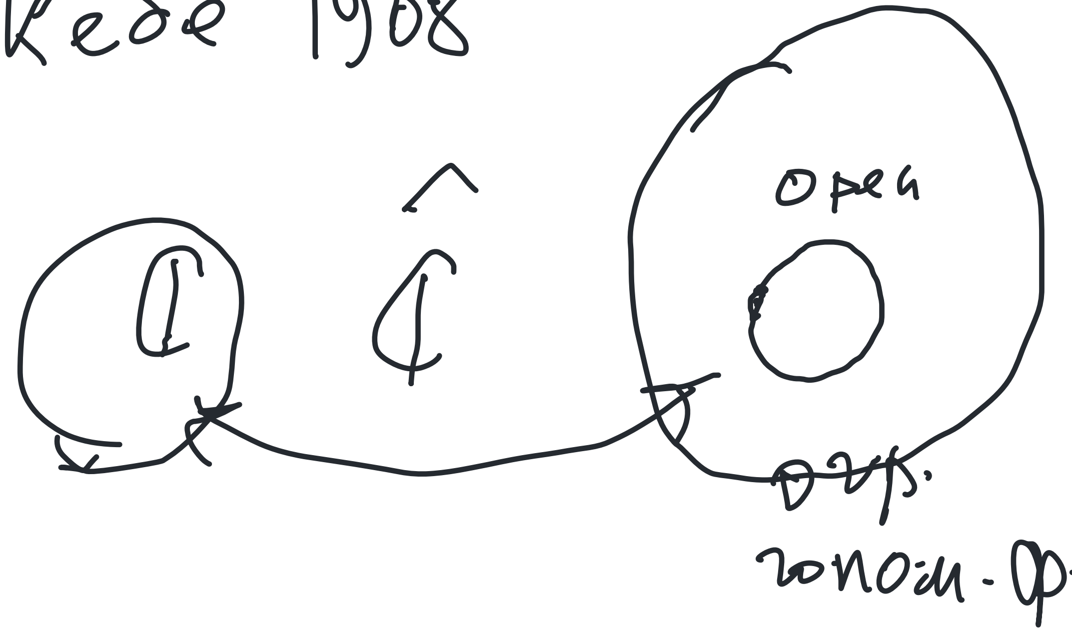
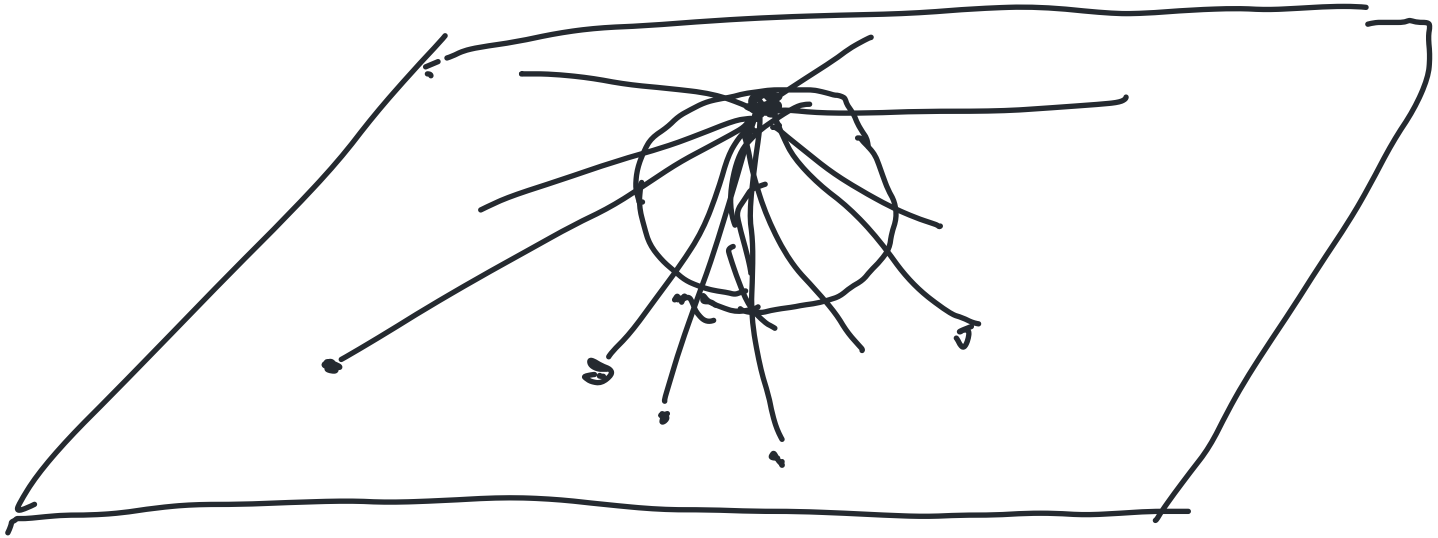
Т. Риман об униформизации.
Кебе 1908





$$\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$$

$$w = e^{\varphi i} \boxed{\frac{z - b}{z - \bar{b}}}$$

$\varphi \in \mathbb{R}$

$b \in \mathbb{H}$

2

Группа автоморфизмов $\mathbb{H}$-1. $a, b, c, d \in R$

<u>Опр.</u> R - кольцо с 1, комм.

$R = \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$SL_2(\mathbb{R})$ действ. на

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1$

$GL_2(R) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\forall \quad ad - bc \neq 0$

$SL_2(R) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad - bc = 1$

$(x : y)$

$(1 : 0)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$x : y = z$

$$\boxed{z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}}$$

$SL_2(\mathbb{R})$

$\{\infty\} \longmapsto a/c$

Утв. Др-ний действие $SL_2(\mathbb{R})$ на $\mathbb{H}$ дает

Огранич.

$$SL_2(\mathbb{R})\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}$$

Лемма

∘ $-I = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $\quad -I$ действует тождеств. на $\mathbb{H}$ ($\hat{\mathbb{C}}$)

$$z = (az+b)/(cz+d) \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

$b = c = 0 \qquad d = a \qquad \underline{ad} - \cancel{bc} = 1$

Следствие $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / \{\pm I\}$ действует

точно на $\hat{\mathbb{R}}$.

Утв. $SL_2(\mathbb{R})$ действует на $\mathbb{H}$

$PSL_2(\mathbb{R})$ — " — точно.

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} gz = \operatorname{Im} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}$$

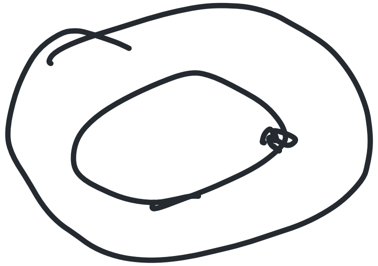
$$\operatorname{Im}(ad z + bc\bar{z}) = \operatorname{Im}(\underbrace{(ad-bc)}_{=1} z) = \operatorname{Im} z > 0.$$

Дискретные подгруппы в $SL_2(\mathbb{R})$

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) \qquad \hat{\Gamma} = SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I\}$$

Аналогии.

$\Gamma = \mathbb{R}$ дискр. $\mathbb{Z}$

1) 

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

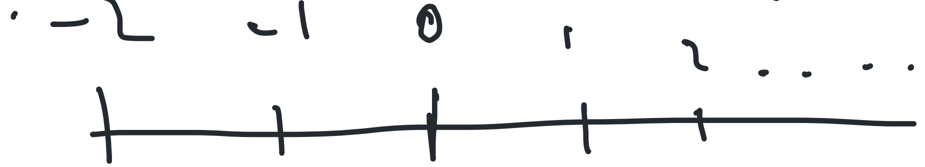
$\Gamma \backslash X$

$\sin(2\pi n x)$ $\cos(2\pi n x)$

базис Шаудера

$f: X \to k \qquad F: \Gamma\backslash X \to k$

$$F(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma x)$$

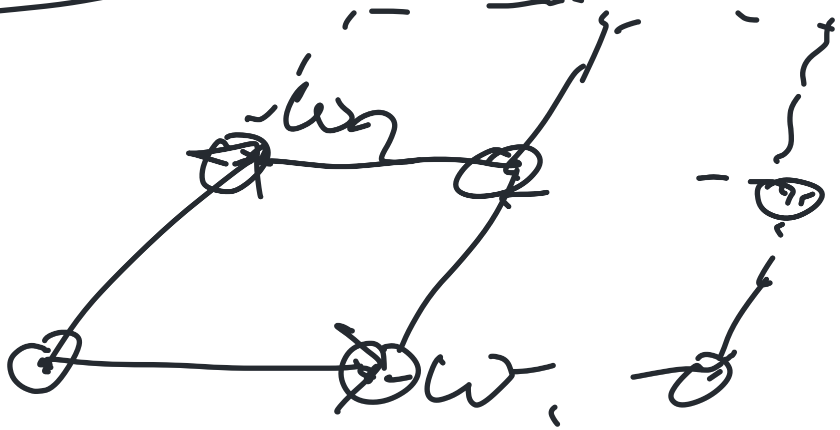


$$\cdot \quad \frac{1}{x+1} \quad \frac{1}{x} \quad \frac{1}{x-1}$$

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$$

Вторая аналогия. Эллиптич. ф-ции на $\mathbb{C}$

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\mathbb{C}$



$a_1\omega_1 + a_2\omega_2$

$\wp$ — функц. Вейерштр.

двоякопериодич. функции

$\wp$ $\wp'$

§. Группа $SL_2(\mathbb{Z})$ и некот. ее свойства.

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ — полная мод. группа.

$\hat{\Gamma} = SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I\}$

$\Gamma(N) \triangleleft \Gamma$

<u>Опр.</u> $\Gamma(N) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{matrix} a \equiv d \equiv 1 \ (N) \\ b \equiv c \equiv 0 \ (N) \end{matrix} \right\}$

$N > 0$

$$0 \to \Gamma(N) \to \Gamma \to SL_2(\mathbb{Z}/N) \to 0$$

$\Gamma(N)$ – главная конгруэнц- подгруппа уровня N.

$\Gamma \supset \Gamma' \supset \Gamma(N)$

конгр.- подгр. уровня N.

$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \ (N) \right\}$

$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \ a \equiv 1 \ (N) \right\}$

$\Gamma(N) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (N)$ $\quad \Gamma_1(N) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (N)$

$\Gamma_0(N) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} (N)$

§. Фундаментальная область.

X – пр-во

Γ – группа

$\Gamma \curvearrowright X$

$z_1, z_2 \in X \quad z_1 \overset{\Gamma}{\sim} z_2$

$\exists \gamma \in \Gamma : \gamma z_1 = z_2$

<u>Опр.</u> F - замкн. ~~[illegible]~~ область в X.

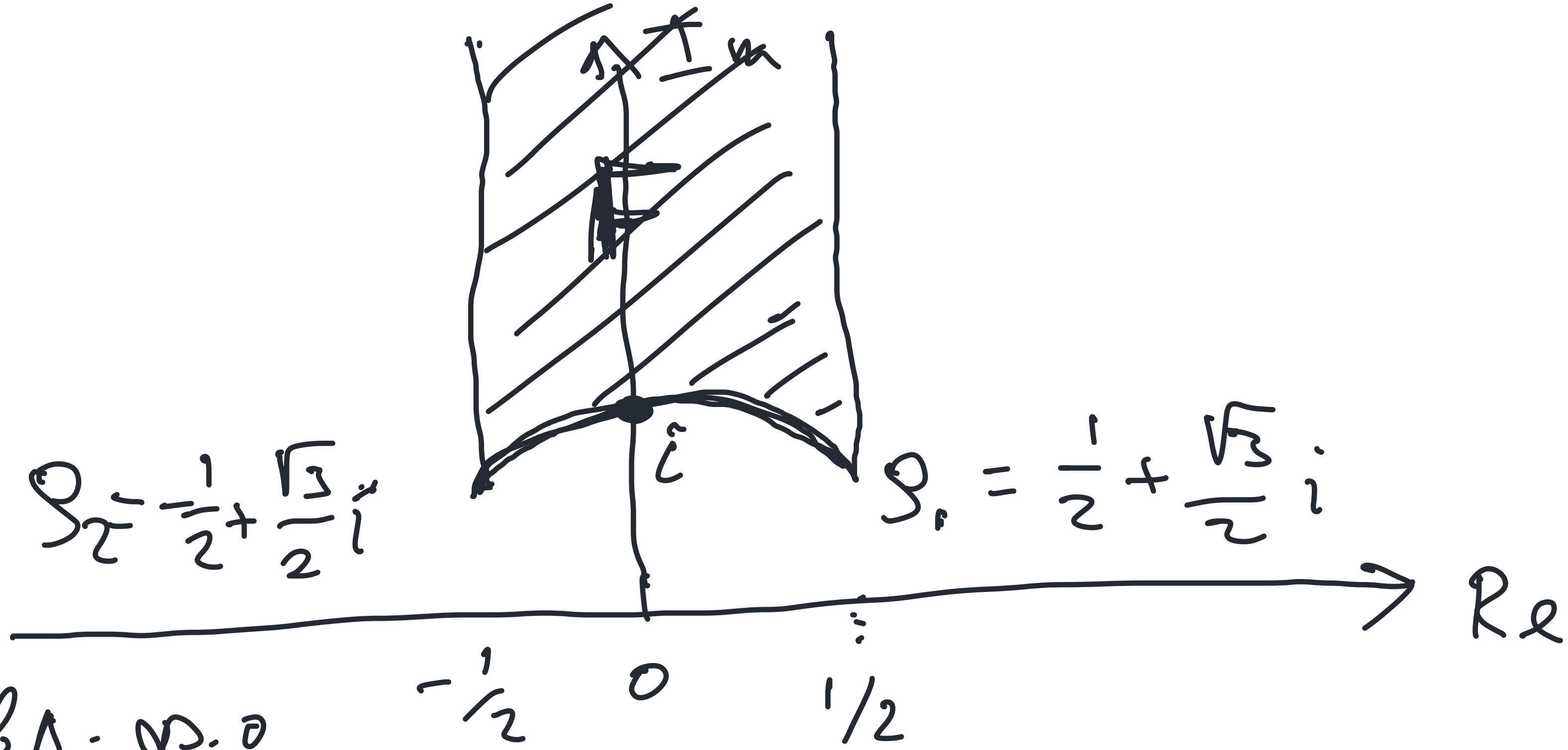
F наз. фунд. обл. Γ в X, если:

1) $\forall x \in X \ \exists \gamma \in \Gamma : \gamma x \in F$

2) $x_1, x_2 \overset{\text{внутр.}}{\in} F \quad \nexists \gamma \in \Gamma : x_1 = \gamma x_2$

очевидно F - связной, односвязной.

$SL_2(\mathbb{Z})$



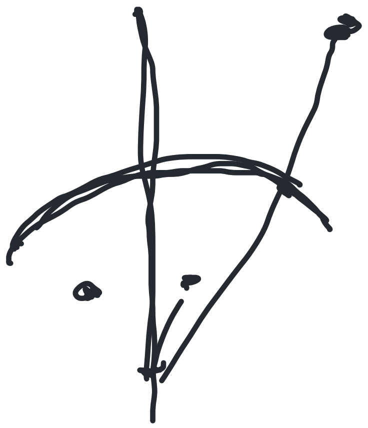
Утв. F явл. ф.о. для $SL_2(\mathbb{Z})$ в $\mathbb{H}$

Д-во:

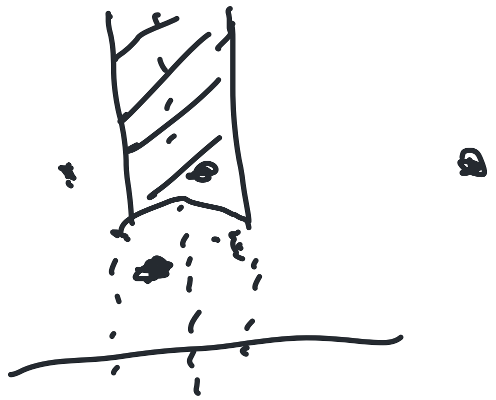
$\Gamma' = (S, T)$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$z \mapsto z+1$ $\qquad$ $z \mapsto -1/z$



$z \in \mathbb{H} \quad \gamma z \in F \quad \gamma \in \Gamma'$



$-\frac{1}{2} \le \mathrm{Re} \le \frac{1}{2}$