Глава. Модулярные формы и функции.

$SL_2\mathbb{Z} > \Gamma \backslash \overline{\mathbb{H}}$ — функции. Мероморфные ~~голоморфные~~

Опр. мером. ф-на $\Gamma\backslash\overline{\mathbb{H}}$ назыв. модулярные функции

Расшифровка. Функции на $\mathbb{H}$.

a) $f(z)$ инвар. отн. Γ $\quad f(\gamma z)=f(z)$ $\forall \gamma \in \Gamma$.

b) $f(z)$ мероморфна на $\mathbb{H}$.

c) $f(z)$ мероморфна в $\forall$ параболич. точке (cusp)

$i\infty$ стаб. ∞ в Γ $\quad T^h = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

h — ширина параб. точки.

$f(z) \longrightarrow \tilde{f}(q)$ $\quad \tilde{f}$ — функц. на $|q|<1$, $0 \neq q$

$q = \exp(2\pi i z/h)$

$\exists n:$ $\quad q^n \tilde{f}(q) = O(1)$ в окр. 0.

$a \in \mathbb{Q}$ $\quad a$ — параб. точка для Γ.

$a = \sigma\infty$ $\quad \sigma \in \Gamma(1)$ $\quad \tilde{f}(\sigma z)$

$a \to \sigma^{-1} a = \infty$

$\Gamma(1)$

$f(z+1) = f(z)$ $\quad \tilde{f}(q) = \sum_{i > N \in \mathbb{Z}} a_i q^i$

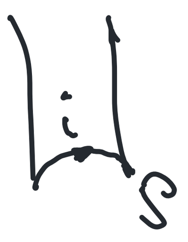
$f(-1/z) = f(z)$

$\Gamma(2)$ $\quad \tilde{f}(-1/z)$ — мером. в ∞

$\tilde{f}(1-1/z)$

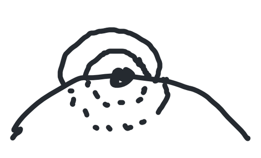
Утв. $\exists!$ модул. ф-ция J (для $\Gamma(1)$) голоморфна всюду, кроме ∞.

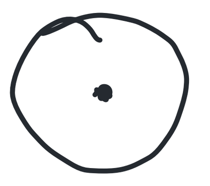
- полюс порядка 1 в ∞.
- $J(i) = 1$
- $J(\rho) = 0$



Д-во: $f: \Gamma\backslash\overline{\mathbb{H}} \xrightarrow{\sim} S^2$ (Риман. сфера)

$a = f(\infty) = \infty$, $\quad b = f(i) = 1$, $\quad c = f(\rho) = 0$.





$f(z^2)$

§. Модулярные формы.

$\Gamma < \Gamma(1)$

f – модулярная форма веса $2k$

a) $f(\gamma z) = \underline{(cz+d)^{2k} f(z)}$ $\quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

b) f голоморфна на $\mathbb{H}$

c) f голом. во всех параб. точках.

<u>Опр.</u> f назыв. параболической формой, если $f(p) = 0$ $\forall$ параб. точки p.

$\tilde{f}(q) = \sum a_n q^n$

$n \geq N$ мером.

$n \geq 0$ форма

$n > 0$ параболич. форма. <u>Spitzenform</u>

$M_k(\Gamma)$ – мод. формы веса k

$S_k(\Gamma)$ – параб. формы — $\shortparallel$ —

<u>Лемма:</u> мером. форма нечетного веса $= 0$.

<u>Д-во</u>: Рассмотрим $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$f(\gamma z) = (0+1)^k f(z)$

$f(z) = f(\gamma z) = -f(z)$

<u>Лемма</u> a) $M_k(\Gamma)$ $\mathbb{C}$-векторн. пр-во.

b) $M_k(\Gamma) M_n(\Gamma) \subset M_{k+n}(\Gamma)$

$M_k(\Gamma)$ – градуиров. комм. $\mathbb{C}$-алгебра.

$S_k(\Gamma)$ – идеал в $M_k(\Gamma)$

$g \in \Gamma$

$$\frac{d(gz)}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

$$\boxed{f(gz)\, d(gz)^{k/2} = f(z)\, dz}$$

§. Примеры мод. форм..

Ряды Эйзенштейна. 1823 – 1852

<u>Опр</u> Решетка $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ мн-во $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$

$\operatorname{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$

$\Lambda(\omega, \omega_2) \simeq \Lambda(\omega_1', \omega_2')$

$\exists\, M \in SL_2(\mathbb{Z})$: $M \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}$

$\mathcal{L}$ – мн-во классов экв. решеток.

$F : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$ назыв. однородной веса $2k$

если $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$ $F(\lambda\Lambda) = \lambda^{-2k} F(\Lambda)$

$\Lambda \in \mathcal{L}$

<u>Лемма:</u> $f(z) = F(\Lambda(z,1))$

$z \in \mathbb{H}$

(ω, ω_2) $\quad \omega_1$ $\quad \omega_2$ $\quad \omega_1$ $\quad \omega_2$

$\forall$ одн. функц. $F : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$ веса $2k$,

функция $f(z) = F(\Lambda(z,1))$

является слабо-модулярной веса $2k$.

$\exists$ $1 \leftrightarrow 1$ соотв. между такими функц. и слабо-модул. формами (веса $2k$)

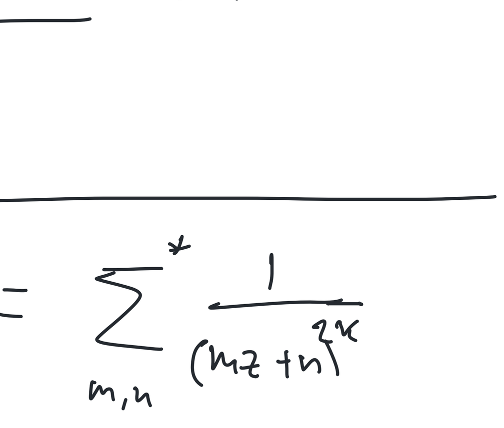
<u>Опр.</u> Λ – решетка $2k$ – вес

$$G_{2k}(\Lambda) = \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \omega^{-2k} = \sum\nolimits^{*} \omega^{-2k}$$

$G_{2k}(\Lambda) \Rightarrow G_{2k}(\Lambda(z,1))$ – это слабо-мод. форма веса $2k$ ~~форм~~.

<u>Замеч.</u> $G_{2k}(\Lambda)$ сходится абсолютно и равн. при $k > 1$.

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{k/2}} \right| < +\infty \quad k > 1$$



$\underline{N} = O(R) \leq CR$

$$\underline{\sum_n \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} \quad \varepsilon > 0}$$

$$G_{2k}(z) := G_{2k}(\Lambda(z,1)) = \sum_{m,n}^{*} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$$

<u>Утв.</u> $k > 1$ $G_{2k}(z)$ – голом. ф-ция на $\mathbb{H}$

$G_{2k}(\infty) = 2\zeta(2k)$

$$\sum \frac{1}{(mz+n)^{2k}} \Rightarrow \sum_{m \neq 0} \frac{1}{(mz+n)^{2k}} + \boxed{\sum_n \frac{1}{n^{2k}}}$$

$g_2(z) = 60\, G_4(z)$ $\quad g_3(z) = 140\, G_6(z)$

$$E_{2k}(z) = \frac{1}{2\zeta(2k)} G_{2k}(z)$$

$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ $\quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ $\quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$

$g_2(z) = \frac{4}{3}\pi^4 E_4(z)$

$g_3(z) = \frac{8}{27}\pi^6 E_6(z)$

$$\Delta(z) = g_2(z)^3 - 27 g_3(z)^2 = \frac{(2\pi)^{12}}{1728}\left(E_4^3 - E_6^2\right)$$

$\Delta \not\equiv 0$

$\Delta(\infty) = 0$ $\quad \boxed{\Delta(z) \in S_{12}(\Gamma)}$

$$j(z) = \frac{1728\, g_2^3(z)}{\Delta(z)} \qquad j(\infty) = \infty \qquad j(\mathbb{H}) \in \mathbb{C}$$

модулярная функция.

z

$$\boxed{j : \Gamma(1) \backslash \overline{\mathbb{H}} \xrightarrow{\cong} S^2}$$